24/04/2017

Μάθημα 10ο

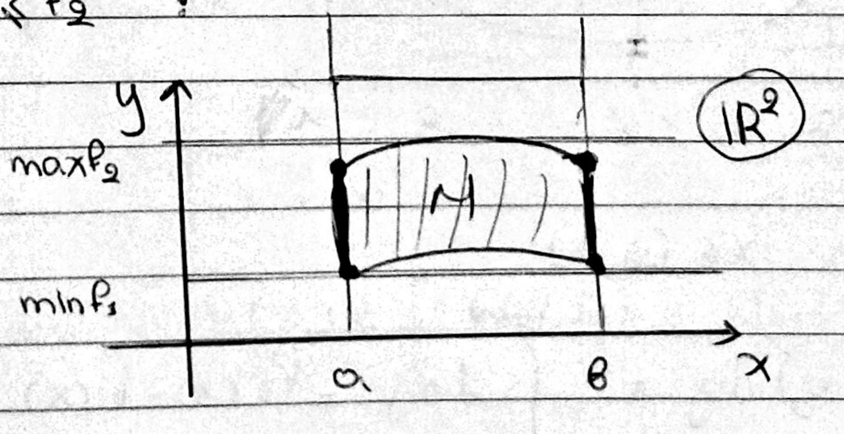
Άσκ 4

Εργαλεία για υπολογισμό πολλαπλών ολοκληρωμάτων ("SOS")

SOS 1. Έστω $B \subset \mathbb{R}^n$ J-μετρήσιμο και $f: B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη $\Longrightarrow$ $F_f = \{(\bar{x}, f(\bar{x})) : \bar{x} \in B\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ έχει $(n+1)$-διάστατο μηδενικό περιεχόμενο

SOS 2. Έστω $B \subset \mathbb{R}^n$ J-μετρήσιμο και $f_1, f_2 : B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες με $f_1 \leq f_2$ $\Longrightarrow$
$M = \{(\bar{x}, y) : \bar{x} \in B,\ f_1(\bar{x}) \leq y \leq f_2(\bar{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$
είναι J-μετρήσιμο και έχει όγκο $V(M) = \int_B (f_2 - f_1)$

Απόδειξη
(Για $n=1$, $B = [a, b] \subset \mathbb{R}$ και $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς) και $f_1 \leq f_2$:



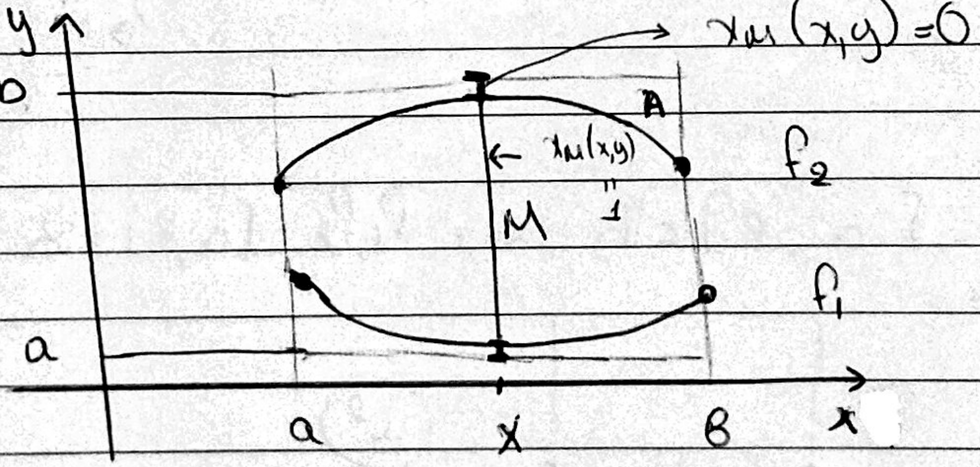
(a)

Το M είναι J-μετρήσιμο αφού
είναι φραγμένο
($M \subset [a,b] \times [\min f_1, \max f_2]$)
και το ∂M έχει μηδενικό περιεχόμενο
αφού τα "τοιχώματα" $= \partial M \cap \{x=a\}$ και $\partial M \cap \{x=b\}$
είναι ευθύγραμμα (φραγμένα) τμήματα των ευθειών

$x=a \quad , x=b$ που έχουν μηδενικό διδιάστατο περιεχόμενο
και το "ταβάνι" $F_{f_2} = \{ (x, f_2(x)) : x \in [a,b] \}$
και το "πάτωμα" $F_{f_1} = \{ (x, f_1(x)) : x \in [a,b] \}$
έχουν διδιάστατο μηδενικό περιεχόμενο.)
βλέπε SOS1

(β) $V(M) = \int_M 1 \, d(x,y) \overset{\text{op}}{=} \int_{[a,b]\times[\min f_1, \max f_2] =: A} \chi_M(x,y)\, d(x,y)$

όπου $\chi_M(x,y) = \begin{cases} 1 & , f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \\ 0 & , y > f_2(x) \lor y < f_1(x) \end{cases}$
για $(x,y) \in A$



Επίσης, για κάθε σταθερό $x \in [a,b]$;

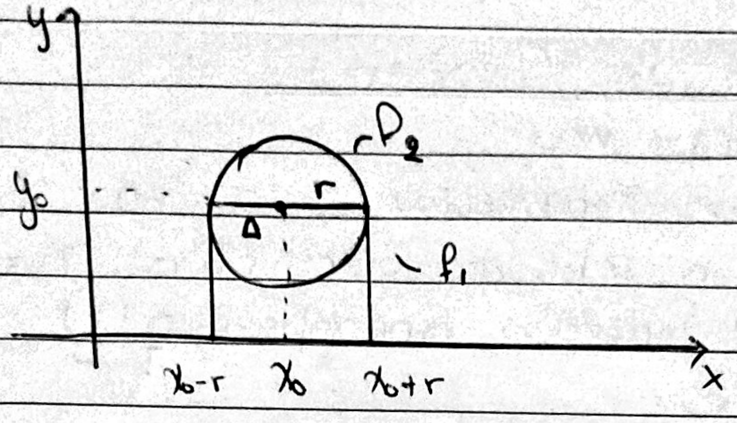
$$\int_{a := \min f_1}^{b := \max f_2} \chi_M(x,y)\, dy = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} 1\, dy = f_2(x) - f_1(x)$$

$\boxed{\text{Fubini}}$! $\Rightarrow$ $V(M) = \int_a^b \Big(\underbrace{\int_a^b \chi_M(x,y)\, dy}_{= f_2(x) - f_1(x)} \Big) dx$

Παράδειγμα:

Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του κυκλικού δίσκου

$$\Delta = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2 \}$$



Αφού $(y-y_0)^2 \leq r^2 - (x-x_0)^2$, για $(x-x_0)^2 \leq r^2$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$|y-y_0| \leq \sqrt{r^2-(x-x_0)^2} \qquad |x-x_0| \leq r$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$y_0 - \sqrt{r^2-(x-x_0)^2} \leq y \leq y_0 + \sqrt{r^2-(x-x_0)^2} \qquad x \in [x_0-r, x_0+r]$$

Άρα: $\Delta = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \underbrace{[x_0-r, x_0+r]}_{=B},$

$$\underbrace{y_0 - \sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}_{=:f_1(x)} \leq y \leq \underbrace{y_0 + \sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}_{=:f_2(x)} \}$$

SOS2 $\Longrightarrow$ $V(\Delta) = \int_B (f_2 - f_1) = \int_{[x_0-r, x_0+r]} (f_2(x) - f_1(x))\,dx =$

$$= \int_{x_0-r}^{x_0+r} 2\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}\,dx \overset{t=x-x_0}{=\!=}$$

$$= 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-t^2}\,dt = 4\int_0^r \sqrt{r^2-t^2}\,dt =$$

$$= 4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot r^2 = \pi r^2$$

Παράδειγμα (Εφαρμογή της Αρχής του Cavalieri):
(Αφού έχουμε το εμβαδό του κυκλικού δίσκου, μπορούμε να υπολογίσουμε απλά τον όγκο της μπάλας με την Α του C)

Υπενθύμιση: SOS3 (Αρχή του Cavalieri)

Έστω $M \subset \mathbb{R}^n$ J-μετρήσιμο και:

(α) το M είναι μεταξύ των υπερεπιπέδων $x_1=a$ και $x_1=b$

(β) για κάθε $\xi \in [a,b]$ η τομή του υπερεπιπέδου $x_1=\xi$ με το M έχει $(n-1)$-διάστατο περιεχόμενο $q(\xi)$ $\Rightarrow$

$$V(M) = \int_a^b q(\xi)\, d\xi$$

Έστω $M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-x_0)^2 \le r^2 \}$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Delta, \overbrace{z_0 - \sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}^{=:\chi_1(x,y)} \le z \le \overbrace{z_0 + \sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}^{=:\chi_2(x,y)} \}$$

βλ. παράδειγμα κυκλικού δίσκου

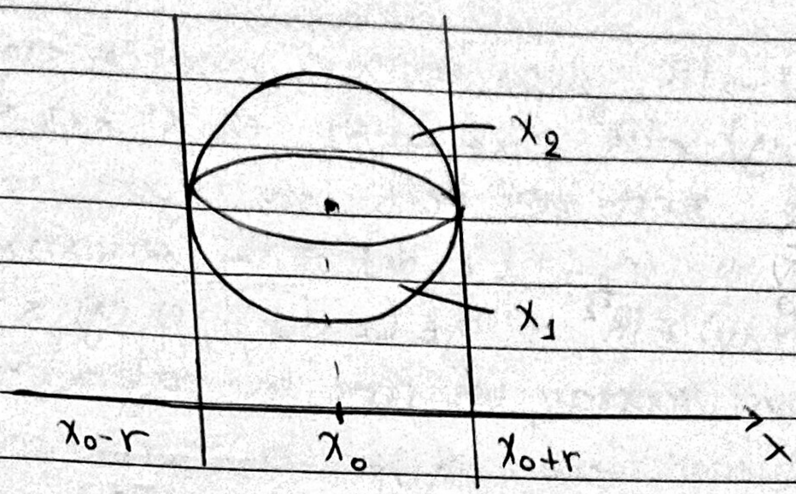
όπου $\Delta = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \le r^2 \}$

Αφού ο κλειστός κυκλικός δίσκος Δ είναι J-μετρήσιμος και οι συναρτήσεις $\chi_1, \chi_2 : \Delta \to \mathbb{R}$ $\xrightarrow{SOS2}$

$$\Rightarrow V(M) = 2 \int_\Delta \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}\, d(x,y)$$

Θα δούμε σε λίγο πως υπολογίζεται αυτό το ολοκλήρωμα

Όμως, με Αρχή του Cavalieri, η μπάλα M βρίσκεται μεταξύ των $x = x_0 - r$ και $x = x_0 + r$
και η τομή του M με το $x = \xi \in [x_0 - r, x_0 + r]$ είναι:



είναι: $Q(\xi) = \{ (\xi, y, z) \in \mathbb{R}^2 : (\xi-x_0)^2 + (y-y_0^2) + (z-z_0)^2 \leq r^2 \}$

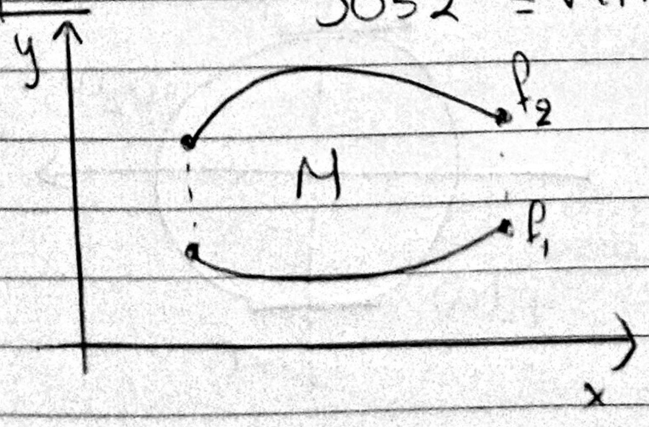
στο επίπεδο
$\underline{x=\xi}$ $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq \underbrace{r^2 - (\xi-x_0)^2}_{=a^2 \geq 0} \}$

έχει εμβαδό $q(\xi) = \pi a^2 = \pi \left(r^2 - (\xi - x_0)^2 \right)$

$\xRightarrow{AC} V(M) = \int_{x_0-r}^{x_0+r} q(\xi)\, d\xi = \int_{x_0-r}^{x_0+r} q(x)\, dx =$

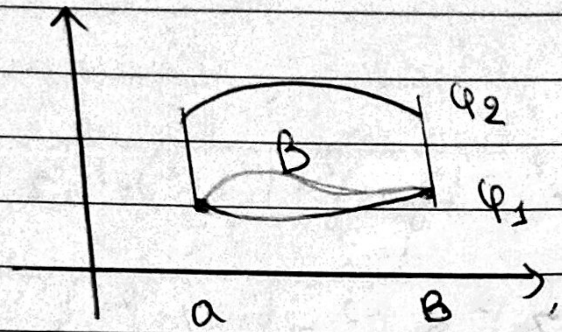
$= \int_{x_0-r}^{x_0+r} \pi \left(r^2 - (x-x_0)^2 \right) dx = \dots = \frac{4}{3} \pi r^3$

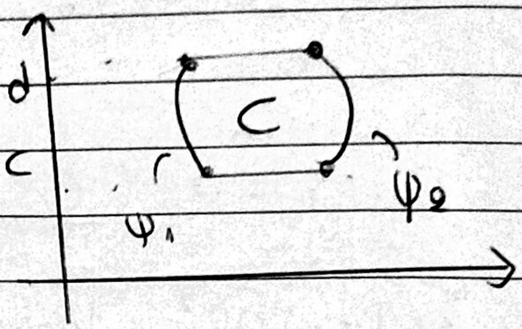
<u>Ορισμός</u> 5052 $= V(M)$ του



τέτοιο M είναι το Δ, κυκλικός δίσκος

Αν $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και $\varphi_1 \leq \varphi_2$
το $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , x \in [a,b] , \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$
λέγεται κανονικό χωρίο ως προς τον άξονα των x
Αντίστοιχα, αν $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $\psi_1 \leq \psi_2$
το $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d] , \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$
ονομάζεται κανονικό χωρίο ως προς τον άξονα των y



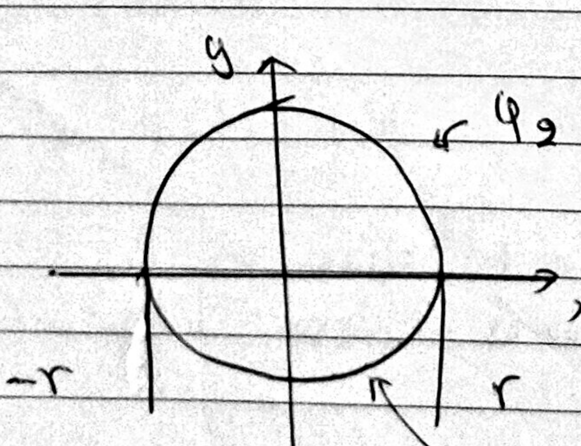


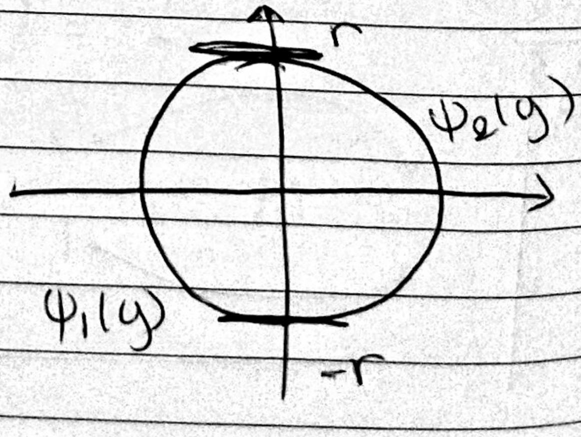
Αν ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ είναι και κανονικό χωρίο ως προς Ox και ως προς Oy τότε ονομάζεται κανονικό χωρίο ως προς Ox και Oy (ή απλά κανονικό χωρίο του $\mathbb{R}^2$)

π.χ. Ο κυκλικός δίσκος $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$

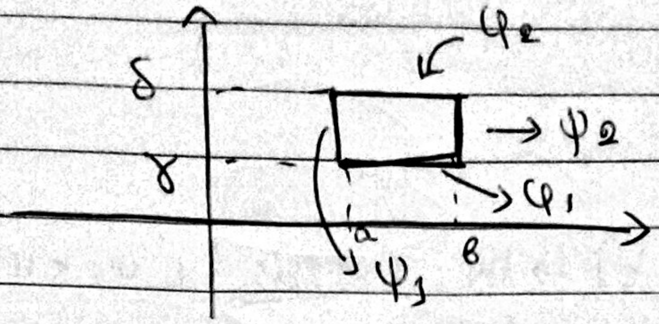
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-r,r] , \underbrace{-\sqrt{r^2-x^2}}_{=\varphi_1(x)} \leq y \leq \underbrace{\sqrt{r^2-x^2}}_{=\varphi_2(x)} \}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-r,r] , \underbrace{-\sqrt{r^2-y^2}}_{=\psi_1(x)} \leq x \leq \underbrace{\sqrt{r^2-y^2}}_{=\psi_2(x)} \}$$





Άλλο π.χ.



Παρατήρηση: Κλειστά ορθογώνια, κυκλικοί (και ελλειπτικοί) δίσκοι είναι κανονικά χωρία ως προς Ox και Oy.

Άσκηση: Εκφράστε τον ελλειπτικό δίσκο $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}\leq 1$ ως ___ κανονικό χωρίο ως προς Ox και ως προς Oy. (σπίτι)